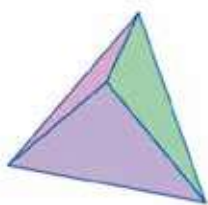


## Bogactwo czworościanu

dr Beata Kuna,  
nauczyciel-konsultant PCEN ds. matematyki

Dwa lata temu opracowywałam temat czworościanu dla Zintegrowanej Platformy Edukacyjnej<sup>1</sup>. Zlecono mi zaprojektowanie pięciu zajęć dotyczących czworościanu. Zastanawiałam się, skąd wziąć aż tyle materiału, aby wypełnić pięć lekcji (ostatecznie sfinalizowano cztery zajęcia, niestety odrzucając zarazem wiele zagadnień). W trakcie zagłębiania się w temat okazało się, że zadań i informacji dotyczących czworościanu foremnego jest tak wiele, że jedno z seminariów, które prowadziłam dla projektu *Zdolni z Pomorza*, nazwałam właśnie: *Bogactwo czworościanu*. W niniejszym artykule skoncentruję się jedynie na ciekawostkach związanych z tą najprostszą z brył.

**Na** początek przypomnę definicję: czworościan – w języku greckim *tetráedro* – to wypukły wielościan, którego cztery ściany są trójkątami.



Rys. B. Kuna w Geo-Gebra

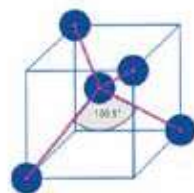
Jeśli te trójkąty są przystające do siebie i równoboczne, to mamy czworościan foremny, należący do tzw. brył platońskich. Istnieje tylko pięć brył platońskich<sup>2</sup>. Są to: czworościan, sześciąt, ośmiościan, dwunastościan i dwudziesto-

ścian. Każda z nich jest foremna.

W XXI rozdziale *Timajosa* Platon wizjonersko, a przez to pięknie, mówi o budowie świata: *Więc według myśli słusznej i wedle prawdopodobnej niech będzie postać bryły czworościanu elementarnym składnikiem i nasieniem ognia. Druga według pochodzenia bryła to, powiedzmy, zarodek powietrza, a trzecia wody. Wszystkie te bryły trzeba sobie przedstawić tak drobne, że, z powodu ich małości, poszczególnych brył każdego rodzaju zgoda widzieć nie możemy – dopiero gdy się ich dużo zbierze, widzimy ich masy. Jeżeli chodzi o stosunki ilościowe, o ruchy i inne siły, to wszystko bóg, o ile tylko jego woli i perswazji ustępowała dobrowolnie natura konieczności, wykończył dokładnie i doskonale, i zestroił to z sensem.*<sup>3</sup> Czyż diament nie jest zbudowany z ułożonych czworościennie atomów węgla?<sup>4</sup> Czy jego siatka krystalograficzna nie tworzy właśnie struktur tak drobnych,

że, z powodu ich małości, poszczególnych brył każdego rodzaju zgoda widzieć nie możemy?

Istnieją też inne związki chemiczne, których budowa opiera się na czworościanie. W metanie jeden atom węgla łączy się z czterema atomami wodoru<sup>5</sup>. A kąt pomiędzy wiązaniami atomu węgla z atomami wodoru wynosi 109,5 stopnia – jest to w sensie matematycznym kąt między promieniami dochodzącymi do punktów styczności kuli opisanej na czworościanie foremnym. Czworościenną krzemowo-tlenową strukturę mają również krzemiany<sup>6</sup>.



Rys. B. Kuna w Geo-Gebra

Bardzo ciekawymi zagadnieniami dotyczącymi czworościanów są bryły wpisane i opisane na czworościanie oraz relacje między ich objętościami. Wspomnę tylko niektóre. W dziele Jana Keplera *Mysterium Cosmographicum*<sup>7</sup>, opisującym model

Układu Słonecznego, czworościan foremny jest opisany na sferze Marsa i wpisany w sferę Jowisza. Stosunek objętości kuli opisanej na czworościanie foremnym do objętości kuli wpisanej w czworościan wynosi 27:1 (przykład zadania matematycznego dla profilu rozszerzonego) – w modelu Keplera to stosunek objętości Jowisza do objętości Marsa. Ponieważ istnieje tylko pięć brył platońskich, model Keplera nie może opisywać naszego Układu. Brakuje bryły platońskiej na przykład dla Uranu.

W sześciąt możemy wpisać czworościan foremny (na dwa sposoby) tak, aby każdy wierzchołek czworo-

1 <https://zpe.gov.pl/a/wprowadzenie/D1HmW8Kml>, <https://zpe.gov.pl/a/wprowadzenie/DnxIN3QWs>, <https://zpe.gov.pl/b/siatka-i-pole-powierzchni-czworoszczianu-foremnego/PBYJZ32ol>, <https://zpe.gov.pl/b/przekroje-czworoszczianu-foremnego/P15wpfetM>

2 <https://matematyka.poznan.pl/artykul/o-brylach-platonskich>

3 Platon *Timajos*; Kritias, Biblioteka Meandra, przełożył W. Witwicki, Warszawa 1951, <https://pbc.gda.pl/dlibra/publication/89432/edition/81813/content>

4 <https://sciaga.pl/slovníki-tematyczne/1436/charakterystyka-diamentu-grafitu-i-fulerenow>

5 [https://www.naukowiec.org/wiedza/chemia/metan\\_1155.html](https://www.naukowiec.org/wiedza/chemia/metan_1155.html)

6 <https://www.pgi.gov.pl/muzeum/wystawy/wystawy-stale/10596-krzemiany.html>

7 [https://pl.wikipedia.org/wiki/Mysterium\\_Cosmographicum](https://pl.wikipedia.org/wiki/Mysterium_Cosmographicum)

ścianu pokrywał się z którymś z wierzchołków sześciangu i zarazem każda krawędź czworościanu z przekątną którejś ze ścian sześciangu. Tutaj stosunek objętości sześciangu do objętości czworościanu wynosi 3:1. *Stella octangula* to wielościan gwiaździsty utworzony ze wspomnianych czworościanów foremnych wpisanych w sześciang w różny sposób, jako ich suma mnogościowa. Możemy wykazać, że objętość dwóch takich brył jak *Stella octangula* równa jest objętości sześciangu (na bazie którego zbudowana jest ta gwiaździsta bryła). Na koniec trudno nie wspomnieć o fakcie, że czworościan foremny, jako jedyna z brył platońskich, posiada bryłę dualną do siebie (wielościan dualny – wielościan zbudowany w ten sposób, że wierzchołek wielościanu dualnego leży w środku ciężkości ściany wielościanu pierwotnego, a jego krawędzie powstają przez połączenie środków ciężkości dwóch sąsiednich ścian), będącą również czworościanem foremnym. Stosunek objętości czworościanu foremnego do objętości do niego dualnego to również 27:1.

Wynalazca telefonu, Aleksander Graham Bell, interesował się lotnictwem – skonstruowaniem maszyny latającej napędzanej silnikiem. Prowadził badania, w których wykorzystywał latawce. Cygnet (co w języku angielskim oznacza młodego łabędzia) był latawcem zbudowanym z 3 393 czworościennych komórek. Zarówno ten projekt, jak i następne – Cygnet II i Cygnet III (każdy z nich startował z wody) – nie odniosły spektakularnego sukcesu, ale pomysł zastosowania konstrukcji czworościennych z dwiema ścianami pokrytymi bordowym jedwabiem był bardzo nowatorski. Cygnet I wzniósł się na wysokość 51 metrów nad poziomem morza<sup>8</sup>.

Richarda Buckminstera Fullera, amerykańskiego architekta, kojarzymy z fulerenami – cząsteczkami węgla, które swą nazwę otrzymały w efekcie skojarzenia z kopułami geodezyjnymi zaprojektowanymi właśnie przez Fullera. Już w tych budowlach pojawiają się trójkąty traktowane przez konstruktora jako podstawowa jednostka wszelkiej struktury. Czwościan foremny – bryła, której cztery ściany są przystającymi trójkątami równobocznymi, był natomiast dla Fullera podstawową jednostką objętości. Nasza nauka, matematyka, opiera się na ortogonalnym układzie współrzędnych. Podstawową jednostką objętości jest centymetr sześcienny czy metr sześcienny. Moim edukacyjnym narzędziem, które wykorzystuję często, tłumacząc i wizualizując uczniom jednostki objętości, jest sześcienna kostka Rubika. Fuller dostrzegł bogactwo czworościanu uważając, że natura

nie działa w sposób równoległy: *Nature is not employing the three dimensional, omniinterperpendicular, parallel frame of the XYZ axial coordinates of academic science... Nature does not operate in parallel.*<sup>9</sup> Twierdził, że opis świata za pomocą trzech osi ustawionych względem siebie tak, jak krawędzie wychodzące z wierzchołka czworościanu foremnego, pod kątem 60 stopni, jest lepszym sposobem opisu rzeczywistości, biorąc pod uwagę wzajemne powiązania strukturalne natury: *This matrix constitutes an array of equilateral triangles that corresponds with the comprehensive coordination of nature's most economical, most comfortable, structural interrelationships employing 60-degree association and disassociation.* Związek kształtu bryły, geometrii, z naturą opisał w książce *SYNERGETICS Explorations in the Geometry of Thinking*.

Czwościan foremny był na tyle idealną figurą dla Fullera, że wraz z innym architektem, Shoji Sadao dla Matsutaro Shoriki, zaprojektował pływające po Zatoce Tokijskiej miasto Triton w kształcie czworościanu foremnego. Każda krawędź wynosiłaby dwie mile długości. Miasto miało posiadać infrastrukturę, sklepy, szkoły<sup>10</sup>. Sama koncepcja czwościennego miasta zrodziła się wcześniej i nazywała się Tetrahedron City. Fuller był ekologiem. Ponieważ  $\frac{3}{4}$  powierzchni Ziemi pokryta jest wodą, według niego zasadne było oszczędzanie terenów lądowych i osiedlanie się na wodzie<sup>11</sup>.

Zakończę ten artykuł polskim akcentem. Piramida Sierpińskiego to bryła powstająca w nieskończonej liczbie kroków, w sposób analogiczny do budowy trójkąta Sierpińskiego. Na przykład z czworościanu foremnego wyjmujemy ośmiościan foremny (o objętości dwa razy mniejszej od danego czworościanu), który powstaje<sup>12</sup> przez odpowiednie połączenie środków krawędzi czworościanu<sup>13</sup>.



Rys. B. Kuna w Geo-Gebra

Jest to krok pierwszy. W następnym kroku postępujemy podobnie w czterech pozostałych czworościanach. Operację kontynuujemy w nieskończoność. Otrzymujemy fraktal – obiekt samopodobny. Korzystając ze wzoru na sumę nieskończonego ciągu geometrycznego możemy pokazać, że objętość piramidy Sierpińskiego jest równa zero.

Gorąco zachęcam Państwa do pracy na lekcji matematyki z czworościanami foremnymi, wykorzystując ich bogactwo.

8 [https://en.wikipedia.org/wiki/AEA\\_Cygnet](https://en.wikipedia.org/wiki/AEA_Cygnet)

9 *SYNERGETICS Explorations in the Geometry of Thinking*, R. Buckminster Fuller in collaboration with E. J. Applewhite

10 <https://dodona.ugent.be/en/activities/457090985>

11 <https://www.behance.net/gallery/2971307/Richard-Buckminster-Fullers-Triton-City-project>

12 jak w Przykładzie 6. <https://zpe.gov.pl/a/przeczytaj/D1A5wgPaI>

13 <http://www.matematyka.wroc.pl/doniesienia/piramida-sierpinskiego>